

Date : / /

Subject:

نركز على الزائدية والمكافئة

معادلات فيزيائية

إيجاد الحل العام للمعادلات تكافئة زائدية في حال الاستكمال النموذجية البسيطة.

إيجاد الحل العام للمعادلة في النمط الزائدي والمكافئة حول المعادلة إلى الشكل النموذجية أوة.

إذا لم تكن معطاة بالشكل النموذجية كما ورد سابقاً وعندئذ يمكن رد المعادلة إلى معادلة تقاضيلية ضمنية عادية في المرتبة الأولى أو ذات مقولات منفصلة.

وذلك بتبسيط أحد المتغيرات في بعض الأحيان وقد تم توحيد الحل العام لها ص 8 مثال 4

أوجد الحل العام للمعادلة التقاضيلية ① $u + y = f(x, y)$ المعادلة معطاة بالشكل النموذجية وهي من النمط الزائدي

$$\frac{\partial}{\partial y} [u_x] = f(x, y)$$

تبسيط x والمكاملة بالنسبة لـ y نجد أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = \int_0^y f(x, z) dz + \phi(x)$$

هنا « دالة ثابتة اختيارية »

تبسيط y والمكاملة بالنسبة لـ x نجد أن

$$u = \int_0^x \int_0^y f(\xi, z) dz d\xi + \int \phi(x) dx + \psi(y)$$

$$u = \int_0^x \int_0^y f(\xi, z) dz d\xi + \phi(x) + \psi(y)$$

$$u = x \cdot y$$

$$xy$$

سؤال 5 ص 9 و
كلها في السطر الرأسي

Date : / / 3 ص 46 م Subject: _____

$$\frac{\partial}{\partial y} [u_x] = x \cdot e^y$$

نثبت x والمكاملة بالنسبة لـ y لذلك .

$$u_x = \int x e^y dy + G(x)$$

$$u_x = x \cdot e^y + G(x)$$

نثبت y والمكاملة بالنسبة لـ x كذا :

$$u = \frac{1}{2} e^y \cdot x^2 + \int G(x) dx + \psi(y)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2} e^y \cdot x^2 + G(x) + \psi(y)$$

علماً أن ψ دالة اختيارية ناصجة لـ y فقط ، G دالة ناصجة لـ x فقط

$$u_{xy} = e^y \cdot x + 1 \cdot G'(x)$$

$$u_{xy} = e^y \cdot x , \quad e^y \cdot x = ? \quad x e^y$$

سؤال 5 ص 9 و

$$u_{xy} + A(x, y) \cdot u_y = 0 \leftarrow P(x, y)$$

نقرض $u_x = v$

$$v_y + A(x, y) \cdot v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -A(x, y) \cdot dy$$

نثبت x لدينا معادلة ذات متغيرات منفصلة

$$\frac{dv}{v} = -A(x, y) dy$$

$$\ln \frac{v}{G(x)} = - \int_0^y A(x, z) dz \Rightarrow$$

$$v = G(x) \cdot e^{- \int_0^y A(x, z) dz} \quad u_x = G(x) e^{- \int_0^y A(x, z) dz}$$

Date : / /

Subject: ٤٤ ص 2

نثبت u والتكامل بالأس x نجد :

$$u(x, y) = \int_0^x G(\xi) e^{-\int_0^y A(\xi, \eta) d\eta} d\xi + \psi(y)$$

قال ص 2

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$$

$$A = x^2, \quad 2B = 2xy, \quad C = y^2$$

$$B^2 - AC = x^2 y^2 - x^2 y^2 = 0 \quad \begin{matrix} > 0 & < 0 \end{matrix}$$

من المنحني، المنحني
من المنحني، المنحني

المعادلة من المنحني المرافق

المعادلة المحصورة

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0$$

$$x^2 dy^2 - 2xy dx dy + y^2 dx^2 = 0$$

معادلة تفاضلية غير خطية

$$(x dy - y dx)^2 = 0$$

بالنسبة للمشتق

$$x dy - y dx = 0 \rightarrow \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\ln \frac{y}{x} = \ln C_1 \Rightarrow \frac{y}{x} = C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

$$+ \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2xy + 0}{x^2} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln x = - \ln C_1$$

$$\ln \frac{y}{x} = \ln C_1 \rightarrow \frac{y}{x} = C_1$$

Date : / /

Subject:

تجربتي التحويل

رتباً

بج

$$z = \frac{y}{x}, \quad \xi = 2 \leftarrow y \text{ أما } x \text{ و } y$$

$$\xi_x = 1, \quad \xi_y = 0, \quad \xi_{xx} = \xi_{yy} = \xi_{xy} = 0$$

$$u_x = \frac{-y}{x^2}, \quad u_y = \frac{1}{x}, \quad u_{xx} = \frac{2y}{x^3}, \quad u_{yy} = 0, \quad u_{xy} = -\frac{1}{x^2}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + (\xi_x u_{\xi y} + \xi_y u_{\xi x}) u_{\xi y} + \xi_y u_{\xi x} u_{\xi y}$$

$$+ u_{\xi} \xi_{xy} + u_{\eta} u_{\xi y} = \dots *$$

$$u_{xy} = \left(\frac{1}{x}\right) u_{\xi y} - \frac{y}{x^3} u_{\eta\eta} - \frac{1}{x^2} u_{\eta y}$$

للحصول على u_{xx} نبدأ من كل x و y

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \xi_y + u_{\eta\eta} \xi_y^2 + u_{\xi\xi} \xi_{xx}$$

$$+ u_{\eta\eta} \eta_{xx}$$

$$u_{xx} = \frac{u}{\xi\xi} - \frac{2y}{x^2} \frac{u}{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4} u_{\eta\eta} + \frac{2y}{x^3} u_{\eta\xi}$$

للحصول على u_{yy} نبدأ من كل x و y

$$u_{yy} = \frac{u}{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + \frac{u}{\xi} \xi_{yy} + u_{\eta\eta} \eta_{yy}$$

$$(u_{yy} = \frac{1}{x^2} u_{\eta\eta})$$

$$x^2 \frac{u}{\xi\xi} - 2y \frac{u}{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^2} u_{\eta\eta} + \frac{2y}{x} \cdot \frac{u}{\eta} + 2xy \left[\frac{1}{x} \frac{u}{\xi\eta} - \right.$$

$$\left. \frac{y}{x^3} \frac{u}{\xi\eta} - \frac{1}{x^2} u_{\eta\eta} \right] + \frac{y^2}{x^2} u_{\eta\eta} = 0$$

Date : / /

Subject:

أمثال $u_{\xi\xi}$, x^2

أمثال $u_{\eta\eta}$, $u_{\xi\eta}$: $\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = 0$

أمثال $u_{\xi\xi}$: $-2y + 2y = 0$

أمثال u_{η} : $\frac{2y}{x} - \frac{2y}{x} = 0$

المعادلة تأخذ الشكل الآتي x^2 :

$x^2 u_{\xi\xi} = 0 \Rightarrow u_{\xi\xi} = 0$

نتج $\frac{\partial}{\partial \xi} (u_{\xi}) = 0 \Rightarrow$ نسبة u والمعادلة بالنسبة ل η

$u_{\xi} = f(\eta)$

أولاً كوني فقط للنقط الزاوي
النقط الناقصي غير مطلوب

$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{A}$

أو عند ضربك الدساتير \Leftarrow

⊕ : $\frac{dy}{dx} = \frac{-1 \pm 2}{1} = \frac{1}{1} = 1$

$dy = dx \Rightarrow y = x + C_1 \Rightarrow y - x = C_1$

المائله قياسية بسيطة

الحل النموذجي سهل ودافع

Date :

Subject:

و حاله عليه

نثبت في المعادلة بالنسبة لـ u

$$u(x, y) = \psi(y) + \phi(x)$$

$$u = \psi(y) \cdot x + \phi(y)$$

وبالمعنى إلى المحتويات نجد أن لكل العام

$$u(x, y) = x \cdot \psi\left(\frac{y}{x}\right) + \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

علم أو ϕ أو ψ دالة اختيارية ثابتة $\frac{y}{x}$ فقط

معادلة ذات أمثال

سؤال 2 ص 36

أو جيب لكل النموذجي للمعادلة التفاضلية الآتية

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} + u_y = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$A = 1, 2B = -2, C = -3$$

الحل

$$B^2 - AC = 1 + 3 = 4 > 0$$

المعادلة من النمط الزائدي

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0$$

بدون يطبق سنا معادلتين

$$dy^2 + 2 dx dy - 3 dx^2 = 0$$

تفاضلتين اختيارية

$$(dy - dx)(dy + 3dx) = 0$$

يمكن كونهما كداء مضارب

$$dy - dx = 0 \Rightarrow y - x = C_1$$

$$dy + 3dx = 0 \Rightarrow y + 3x = C_2$$

أو عند طريق الدساتير

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

$$\textcircled{+} \frac{dy}{dx} = \frac{-1+2}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Date : / /

Subject:

$$dy : dx \Rightarrow y = x + c_1 \Rightarrow y - x = c_1$$

$$\odot \frac{dy}{dx} = \frac{-1-2}{1} = -3$$

$$\Rightarrow \xi = y - x, \eta = y + 3x$$

$$\xi_x = -1, \xi_y = 1, \xi_{xx} = \xi_{xy} = \xi_{yx} = \xi_{yy} = 0$$

$$\eta_x = 3, \eta_y = 1, \eta_{xx} = \eta_{xy} = \eta_{yx} = \eta_{yy} = 0$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, (u_y = u_\xi + u_\eta)$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + (\xi_{xy} \eta_x + \xi_y \eta_{xx}) u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + 0$$

- *

$$u_{xy} = -u_{\xi\xi} + (-1+3) u_{\xi\eta} + 3 u_{\eta\eta}$$

$$(u_{xy} = -u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta})$$

Date : / /

Subject:

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - \xi^2_x + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta^2_x + 0$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi^2_y + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta^2_y + 0$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\xi} - u_{\xi\xi} - 6u_{\eta\eta} -$$

$$- 3u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\xi} - 3u_{\eta\eta} + u_{\xi} + u_{\eta} = 0$$

نقط

$$-12u_{\xi\eta} + u_{\xi} + u_{\eta} = 0$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{12} (u_{\xi} + u_{\eta})$$

لا يوجد الحل العام لها

وليس بالأمر سهل

كما نصح إك بالترقية العامة "بدها"

50 مثال رقم 5 دورة

انضم مثال بالمثل النموذجي

المعادلة المتطابقة بالمثل

$$u_{xy} + u_x + y u_y + (y-1)u = 0 \quad \text{--- ①}$$

Date : / /

Subject:

عن النمط الزاوي

المعادلة ① تكتب على الشكل الآتي .

$$\frac{\partial}{\partial x} [u_y + \frac{u}{y}] + y [u_y + u] - u = 0$$

عندما تأتي مائل بهذا الشكل

مأخوذاً لا تجميع الحدود المتشابهة

نترصد أن (2) $u_y + u = z$ ونوضح بالمعادلة

$$z_{xy} + y \cdot z - u = 0 \Rightarrow$$

$$u = z_x + y z \quad (3)$$

شتقت z بالنسبة ل y

$$u_y = z_{xy} + z + y \cdot z_y$$

$$z_{xy} + (z_x + y \cdot z_y) + y \cdot z = z$$

$$z_{xy} + z_x + y \cdot z_y + y \cdot z = 0$$

$$\downarrow \frac{\partial}{\partial x} [z_y + z] + y [z_y + z] = 0$$

$$w = z_y + z$$

نجري التعويل

نثبت لا ونشتق
بالنسبة ل x

$$w_x + y w = 0$$

نثبت لا نحصل على معادلة ذات متغيرات مفصلة

$$\frac{dw}{w} = -y dx$$

$$y_1 + A(x)y = Bx \quad [u(x)y]' = B(x)u(x)$$

$$\text{عامل التكامل} \quad u(x) = e^{\int A(x) dx} \quad u(x) \cdot y = \int B(x) u(x) dx$$

Date : / / Subject: $d(x) + C$ المعادلة

$$p_m \frac{u}{u(x)} = -y \cdot x \quad \text{المعادلة فصل على}$$

$$u = \psi(y) \cdot e^{-yx}$$

نبدل u بما يلي

$$x u_y + u = \psi(y) \cdot e^{-yx}$$

نشتد x فنصل إلى معادلة
خطية كد هو
والمتغير هو y

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل هذا

$$u(y) = e^{\int dy} = e^y$$

$$[e^y \cdot u]' = \psi(y) \cdot e^{-yx} e^y = \psi(y) \cdot e^{y(1-x)}$$

$$e^y \cdot u = \int_0^y \psi(\eta) \cdot e^{\eta(1-x)} d\eta + C(x)$$

$$u = e^{-y} \int_0^y \psi(\eta) \cdot e^{(1-x)\eta} d\eta + e^{-y} C(x)$$

$$u_x = e^{-y} \int_0^y -\eta \psi(\eta) e^{(1-x)\eta} d\eta + e^{-y} C'(x)$$

* نضع الـ 52 فوق المثال 7

$$(1-x)\eta \quad e^{-y}$$

$$e \quad d\eta$$

* مثال 7 من 52

معادلة بيرداربو $\alpha = 1, \beta = 1$

$$E(1,1) = dx y - \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x-y} \left(\frac{u}{y} \right) = 0$$

الشكل النموذجي

اجاد الحل العام

اجاد الحل الخاص بالشكل العام

Date :

Subject:

المعادلة ذات الرتبة الثانية الخطية

اول خطوة نضرب بـ $(x-y)$

$$(x-y) u_{xy} - u_x = 0$$

هذه معادلة من النمط التفاضلي ومعطاه بالشكل النموذجي

وهذه المعادلة تكتب على الشكل الآتي

$$\frac{\partial}{\partial x} [(x-y) u_y - u] = 0$$

نشتق الثاني من باء + نشتق الاول من باء الثاني

نسبب لـ والمعادلة بالنسبة لـ x تكون ان

$$(x-y) u_y - u = \psi(y)$$

$$u_y \cdot \frac{1}{x-y} \cdot u = \frac{\psi(y)}{x-y}$$

نسبب x نحل على معادلة خطية لها عامل تكامل هو

$$M(y-x) \cdot \frac{1}{y-x}$$

دفعنا الاشارة الى

$$M(y) = e = e = y - x$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل فنصل على معادلة بالشكل الآتي

$$[(y-x) \cdot u]' = -\psi(y) = \psi(y)$$

$$(y-x) u = - \int \psi(y) dy + \phi(x)$$

$$\psi(y) + \phi(x)$$

علما ان ψ تابعة لـ y و ϕ تابعة لـ x فقط

$$u(x,y) = \frac{\phi(x) + \psi(y)}{y-x}$$

وهو الحل العام للمعادلة المطلوبة

صحيح: ص 63 رقم 7 الجواب 44 - 45

$$u(x,y) = \frac{2}{7} (y+2x) + f(34-x)$$

منه
المطلوب
الاول